

ФМИ ОУ 2019-2020 - Домашна работа 2

Янис Василев, ianis@ivasilev.net

12 ноември 2019

Задача 1. Дадена е системата

$$\begin{cases} \int_0^T (-1)dt \rightarrow \max \\ \dot{x} = y, \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = 0 \\ \dot{y} = u, \quad y(0) = y_0, \quad y(T) = 0 \end{cases}$$

където $u(t) \in [-1, 1]$.

Да се намери оптимално управление $\bar{u}(t)$ за началните условия $x_0 = 0$ и $y_0 = 1$.

Решение. Построяваме хамилтонияна

$$H(x, y, u, \pi_0, \pi_x, \pi_y) = -\pi_0 + y \cdot \pi_x + u \cdot \pi_y.$$

Разглеждаме спрегнатите уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_x(t)}{dt} &= 0, \\ \frac{d\pi_y(t)}{dt} &= -\pi_x, \end{aligned}$$

откъдето получаваме $\pi_x(t) = a$ и $\pi_y(t) = -at + b$ за неопределени константи a и b . При това $(\pi_0, a, b) \neq \vec{0}$, защото иначе $\pi_0 = 0$ и $\pi_x \equiv \pi_y \equiv 0$, което противоречи на принципа за максимума. Допускаме, че съществува оптимално управление $\bar{u}(t)$. За почти всяко $t \in [0, T]$ е изпълнено

$$\begin{aligned} H(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t), \pi_0, \pi_x(t), \pi_y(t)) &= \max_{u \in [-1, 1]} H(\bar{x}(t), \bar{y}(t), u, \pi_0, \pi_x(t), \pi_y(t)) = \\ &= \max_{u \in [-1, 1]} [-\pi_0 + a\bar{y}(t) + (-at + b)u] = \\ &= -\pi_0 + a\bar{y}(t) + \max_{u \in [-1, 1]} [(-at + b)u]. \end{aligned}$$

Максимумът $\max_{u \in [-1, 1]} [(-at + b)u]$ се достига в краищата на интервала, т.е.

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} -1, & -at + b < 0 \\ 1, & -at + b > 0 \\ \text{недефинирано}, & -at + b = 0. \end{cases}$$

Ще разгледаме поотделно управленията, съответстващи на двата случая

$$\bar{u}_+(x_0, y_0, t) = 1$$

$$\bar{u}_-(x_0, y_0, t) = -1$$

$$\bar{y}_+(x_0, y_0, t) = y_0 + \int_0^t \bar{u}_+(s)ds = y_0 + t$$

$$\bar{y}_-(x_0, y_0, t) = y_0 - t$$

$$\bar{x}_+(x_0, y_0, t) = x_0 + \int_0^t \bar{y}_+(s)ds = x_0 + y_0 t + \frac{t^2}{2}$$

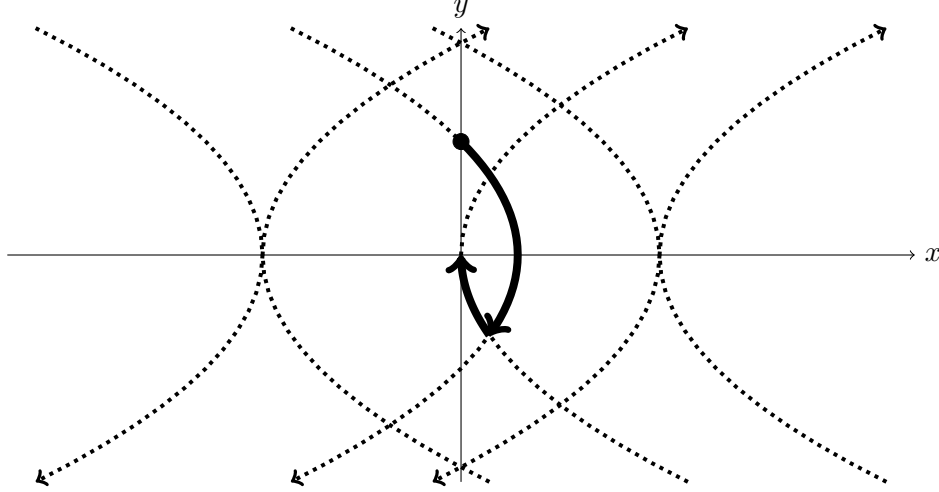
$$\bar{x}_-(x_0, y_0, t) = x_0 + y_0 t - \frac{t^2}{2}.$$

Въвеждаме означението $\bar{\gamma}(x_0, y_0, t) := (\bar{x}(x_0, y_0, t), \bar{y}(x_0, y_0, t))$. Аналогично дефинираме $\bar{\gamma}_+(x_0, y_0, t)$ и $\bar{\gamma}_-(x_0, y_0, t)$.

Получаваме две фамилии от ориентирани параметрични криви,

$$t \mapsto \bar{\gamma}_+(x_0, y_0, t), \quad t \mapsto \bar{\gamma}_-(x_0, y_0, t)$$

зависещи от началните условия $\bar{x}_+(x_0, y_0, 0) = x_0$ и $\bar{y}_+(x_0, y_0, 0) = y_0$.



Фигура 1: С пунктир са означени кривите $\bar{\gamma}_+$ и $\bar{\gamma}_-$ за различни стойности на x_0 и y_0 . Удебелена е кривата $\bar{v}$.

Времето t_1 , при което управлението $\bar{u}(t)$ си променя знака, намираме като пресичаме съответните (ориентирани) криви през точките $(0, 1)$ и $(0, 0)$:

$$\begin{aligned} \bar{y}_+(0, 0, t) &= t = 1 - s = \bar{y}_-(0, 1, t), \\ \bar{x}_+(0, 0, t) &= \frac{t^2}{2} = s - \frac{s^2}{2} = \bar{x}_-(0, 1, s), \end{aligned}$$

откъдето получаваме квадратното уравнение

$$\begin{aligned} \frac{(1-s)^2}{2} &= s - \frac{s^2}{2} \quad | \cdot 2, \\ 1 - 2s + s^2 &= 2s - s^2, \\ 2s^2 - 4s + 1 &= 0, \\ s &= \frac{4 \pm \sqrt{8}}{4} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ t = 1 - s &= \mp \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Тук обхождаме кривата $\bar{\gamma}_-(0, 1, s)$ следвайки ориентацията ѝ (от $(0, 1)$ до пресечната точка), а $\bar{\gamma}_+(0, 0, t)$ - обратно на ориентацията ѝ (от пресечната точка до $(0, 0)$). Следователно трябва да изберем решение, което удовлетворява $t \leq 0$ и $s \geq 0$, т.е.

$$t = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad s = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Така намираме $t_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ и самата пресечна точка $(x, y) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Управлението има вида

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} -1, & t < t_1 \\ 1, & t > t_1 \\ \text{недефинирано,} & t = t_1. \end{cases}$$

За $\bar{T}$ получаваме $\bar{T} = s - t = 1 + 2\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$.

Ще определим константите a и b . Като сравним получените представяния за $\bar{u}(t)$, виждаме, че $-at_1 + b = 0$, т.е. $b = at_1$.

Освен това, за $t < t_1$ имаме $\bar{y}(t) = 1 - t$ и принципът за максимума ни дава равенството

$$\begin{aligned} H(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{u}(t), \pi_0, \pi_x(t), \pi_y(t)) &= \\ &= -\pi_0 + a(1 - t) + (-at + b)(-1) = \\ &= -\pi_0 + a - b = \\ &= -\pi_0 + a(1 - t_1) = 0. \end{aligned}$$

Имаме две възможности, тъй като $\pi_0 \in \{0, 1\}$. Ако $\pi_0 = 0$, то $a = \frac{1}{1-t_1}\pi_0 = 0$ и $b = at_1 = 0$, което е в противоречие с условието $(\pi_0, a, b) \neq \vec{0}$.

Остава възможността $\pi_0 = 1$. Тогава

$$a = \frac{1}{1 - t_1} = -\sqrt{2}, \quad b = t_1 a = -1 - \sqrt{2}.$$